数理解析研究所講究録
744巻 1991年 78-84


# 動的計算格子制御について

筑波大　電子・情報　今井　仁司　(Hitoshi Imai) *
京都大　工　畑上　到　(Itaru Hataue)
千葉大　工　河原田　秀夫　(Hideo Kawarada)
筑波大　電子・情報　名取　亮　(Makoto Natori)

## 0．序

偏微分方程式の数値計算では，計算格子の制御が重要な問題となる．というのは，任意形状領域で格子を生成しなくてはならないし，解に応じて格子を変化させる必要があるからである．

一昔前までは，任意形状領域で偏微分方程式を精度よく解くことはとても難しいものであった．それが，有限要素法や境界要素法，一般座標系による差分法が開発されるにあたって，方法論的には確立されたように思われる．ただし，それらの方法における初期の目的は，どのようにして領域に応じた格子を生成し，それを用いてどのように解を構成するかということであった．したがって格子制御という立場からみると静的格子制御が問題であったといえる．静的格子制御技術の発達によって，実に様々な形状領域での偏微分方程式が解けるようになった．

とはいえ，静的格子制御では，解の滑らかさや領域形状が時間的に変わらないことが前提となっているために，圧縮性流体の問題や自由境界問題に対しては対処できない．そこで，格子を時間的に変化させる動的格子制御技術の開発が重要になってきた．圧縮性流体の数値計算における解適合格子は動的格子制御技術の典型的な例である．このような動的に変化する格子を用いて解を構成すること自体は，有限要素法，境界要素法，差分法において問題はない．問題になるのは，動的格子制御の効率である．

ここでは効率的な動的格子制御技術として，ファジィを用いた格子制御と対話型格子制御を考える．

---

*研究の一部は筑波大学学内プロジェクト研究からの助成に基づくものである．

## 1．計算格子のファジィ制御

### 1.1 数値計算におけるファジィ制御

近年の膨大なる数値計算の結果，数値解を出すのに有効な知識（ノウハウ）が蓄えられてきた．そこでこれからは，それらを用いてより効率的な（汎用性のある）計算を行なうことが重要となる．それには人工知能の活用が有用であると思われる．

数値計算のどのような場面で人工知能が適用可能であろうか．汎関数の最小化問題，時間積分における時間の刻み幅の制御，時間発展問題における初期値の選択問題（特に定常解を求めるような場合には重要である），計算格子の制御などが考えられる．

まず，汎関数の最小化問題を考える．汎関数がいつも正確に計算できてかつ凸ならば，共役勾配法のようなエレガントな解法が使える．しかしながら，現実の問題では汎関数が凸になることはまず望めない．それ以上に，汎関数を正確に計算すること自体容易ではない．汎関数の中に非線形問題の解（例えば自由境界問題の解）がパラメータとしてはいっているとする[3]． 非線形問題の解はいつも存在するとは限らないので，最小化を下手に行うと解のない非線形問題を解く羽目におちいる．汎関数の計算はそこでできなくなって，最小化は途中で終了する．こういう状況下では，いままでの最小化法は有効であるとはいえない．そこで人工知能を活用した最小化法の適用可能性が考えられる．上記のような汎関数に対してではないが，偏微分方程式の最適問題における汎関数の最小化にファジィ推論を用いた例が報告されている[1]．

発展方程式の時間積分を考えてみる．時間積分を陰解法で行うと，時間刻みに対する安定性の問題はなくなるものの，反復計算を行わなくてはならないために，収束判定の問題と計算時間の問題が出てくる．そこで陽解法で行うことを考える．すると，安定性の問題から，時間刻み幅が大きくとれなくなる．かといって，あまり小さくとりすぎると，よりおおくの時間ステップを進まなくてはならなくなり，やはり計算時間がかかる．そこで何らかの最適な刻み幅を決定する必要性が生じる．このような最適化に，ファジィ制御が有効であることが動燃の村松氏らによって報告されている．また同氏は，初期値の選択問題に対してもファジィ推論を用いてよい結果を得ているようである．

計算格子の制御にも人工知能の活用が考えられる．格子制御は静的制御と動的制御に分けられるが，静的制御に関しては，破壊力学の問題で，ファジィを用い

て格子生成を行ったという報告がある[8]．そこで動的制御に対する応用を考える．

1.2 ファジィを用いた動的計算格子制御

インクジェットなどの自由境界問題では格子の動的制御が必要になる．たとえば，自由表面に格子を集めながら全体のバランスを保つというような格子制御が必要になる[4]． また，圧縮性流体の計算などでは解適合格子と呼ばれている動的格子制御が既に行われており[5,6]， 人工知能を用いてより細かい制御を行うことも考えられている[7]． しかしながら，いままでの方法では概して格子制御に時間がかかりすぎ，また制御が不自然であるという欠点がある．

ここでは，ファジィ推論を用いて，高速で自然な格子の動的制御を行うことを考える．特に，非定常圧縮性流体の数値シミュレーションを意識して格子の制御を行うことにする．

格子をファジィ制御するためには，何を観測し，どのような推論規則でもって，格子のどういう量を制御するかを決めてやる必要がある．ここでは観測するものは密度や速度などの物理量であり，それらの変動の大きいところに格子を集中させることにする．そのために，格子点の移する方向を（局所的に）決めておき，その方向の移動距離を推論で決定することにより格子を動かすことにする．

推論規則はいろいろ考えられると思うが，ここでは簡単のために[1] にあるような推論を行なうことにする．そのために，物理量の空間に関する変動（空間に関する１階微分に相当）の絶対値を偏差にとり，その時間的な変動（空間と時間に関する微分に相当）を偏差の偏差にとって，[1] にあるような手順で移動距離を決定する．

1.3 数値計算結果

図１では，上で定めた推論規則のチェックのために，与えられた関数を物理量とみなして格子がどのように動くかを数値計算している．関数にはショックに相当する部分を設けてある．図１を見ると，この“ショック”のところに格子点が集まろうとしている傾向が現れている．しかも“ショック”が離れようとすると格子点がショックに対する追跡をやめているということも見ることができる．したがって，推論規則は有効であると思われる．

そこで，図２では，図１で用いられた推論規則を実際のバーガーズ方程式

$$u_t + uu_x = 0$$

に適用してみた．空間に関する離散化は（一般座標系における）中心差分で行ない，時間積分は陽的に行なった．初期格子は等間隔にとった．特性曲線法の解と較べると，あまりよい結果が得られなかったことが分かる．格子点がショックのところに期待したほど集まらず，数値解の振動も起きている．

## 2．対話型格子制御

動的格子制御を自動的に行うことができればそれにこしたことはないが，少なくとも現時点ではそれは困難であると言わざるを得ない．たとえば，体積変化する凝固問題の数値シミュレーションを一般座標系を用いた写像関数法で行うことを考えよう[2]． 初期条件が同じでも，どのような状況で凍っていくかは解いてみないと分からない（図３参照）．状況によって計算の仕方（境界条件の設定の仕方）が全く異なってくる．このような状況を，予め全て網羅してプログラムの中に組み込んでおくことは，はなはだ困難であり効率的であるとは言えない．

そこで，効率的な動的格子制御として部分的に人間が介入する対話型を考える．ここで，対話型の格子制御とはつぎのようなものである．高速の主計算機と小回りがきく EWS などがネットワークを介して結ばれているとする．主プログラムに，解の状況をモニターし，状況が変わりそうになるとデータをセーブして計算を止め，その旨のメッセージをユーザーに発するサブプログラムを組み込む．それを主計算機に投入する．計算途中で解の状況が変わりそうになると，サブプログラムが計算を止めユーザーに知らせる．そこでユーザーは，EWS などで計算結果を可視化してどのような状況になっているのか判断し，同時にプログラムの境界条件の設定や格子配置などの変更を可視化して行なう．納得のいく変更が行えたら，またジョブを主計算機に投入する．

プログラム開発がカードリーダーから TSS になって効率的になったのと同様に，現在では場当り的な格子に関するプログラムの中途変更が，可視化して対話型で行なうことによって効率的行なうことができると思われる．

## 3．まとめ

効率的な動的格子制御技術として，ファジィを用いた格子制御と対話型格子制御を考えた．どちらもまだ，あまり実用化されていないと思われるが，その実用化は十分意味があることと思われる．今後の発展に期待したい．

## 参考文献


[1] L.S. Gao et al., Fuzzy Control of System Governed by Elliptic Partial Differential Equations, Tech. Report of Math. Sci., Chiba University, 5(8), 1989.

[2] T. Hanada et al., Numerical Computations for Solidification Problems with Change of Volume (submitted).

[3] H. Imai et al., A Shape Design Problem of a Vessel in Which Plasma is Confined, Tech. Report of Math. Sci., Chiba University, 5(7),(1989).

[4] Y. Katano et al., Numerical Study of Drop Formation from a Capillary Jet Using a General Coordinate System, Theoretical and Appl. Mech., Univ. Tokyo Press, 34 (1986), 3-14.

[5] 川上一郎，相澤正満, FEMALE with TVD, ＭＨＤ数値計算とトーラス閉じこめの基礎研究講演報告集, 199O, 173-183.

[6] K. Nakahashi and G.S. Deiwert, Self-Adaptive-Grid Method with Application to Air－foil Flow, AIAA J., 25(4)(1987), 513-52O.

[7] S. Sengupta et al., eds., Numerical Grid Generation in Computational Fluid Mecha－nics, '88, Pineridge Press Limited, 1988.

[8] 吉村忍，矢川元基，中尾和弘，ＦＥＭモデリング支援エキスパートシステムの開発，構造工学における数値解析法シンポジウム論文集，14(1990), 357-362.


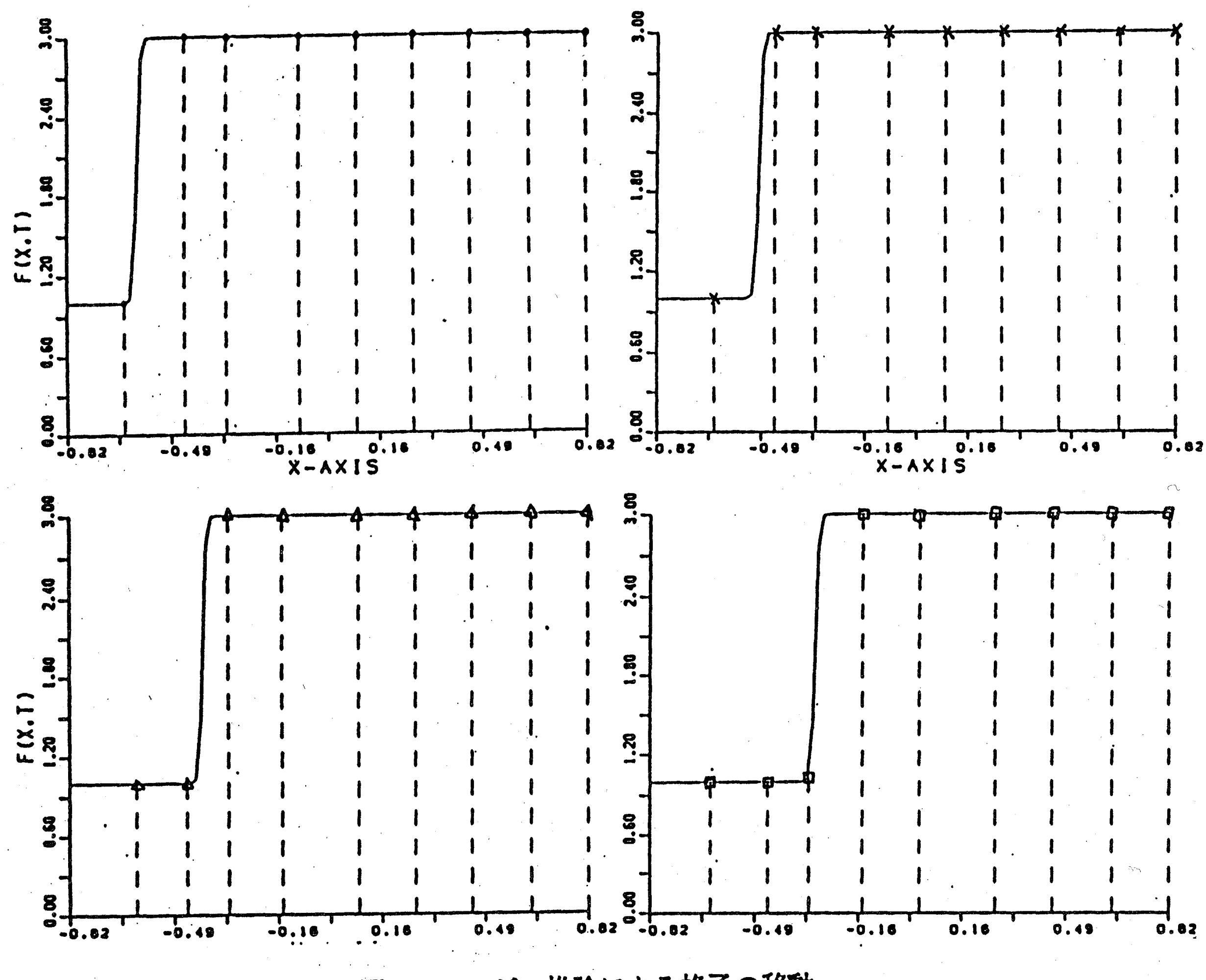


図1　ファジィ推論による格子の移動

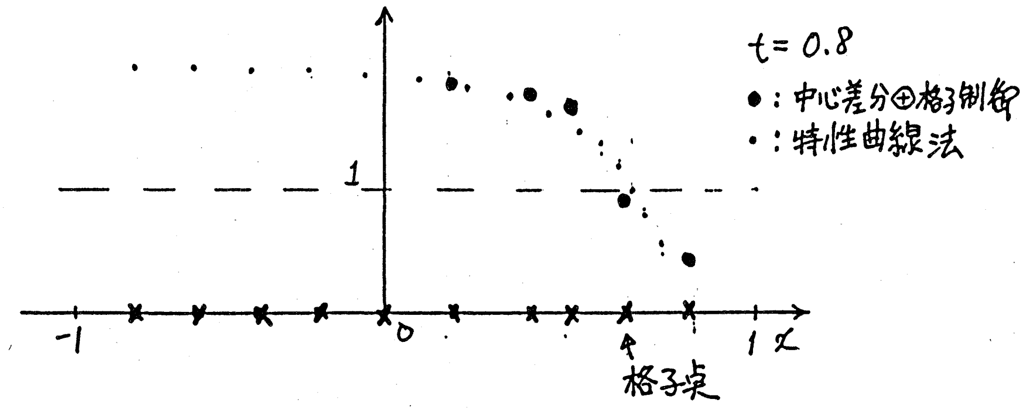


図2　バーガーズ方程式への応用

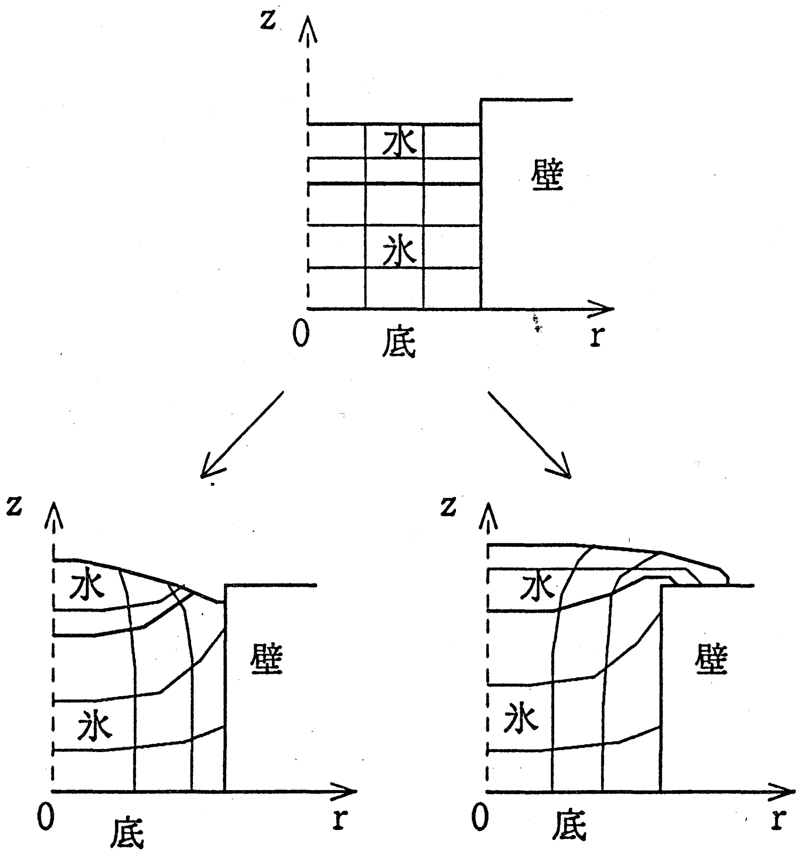


図3　体積変化を伴う凝固現象

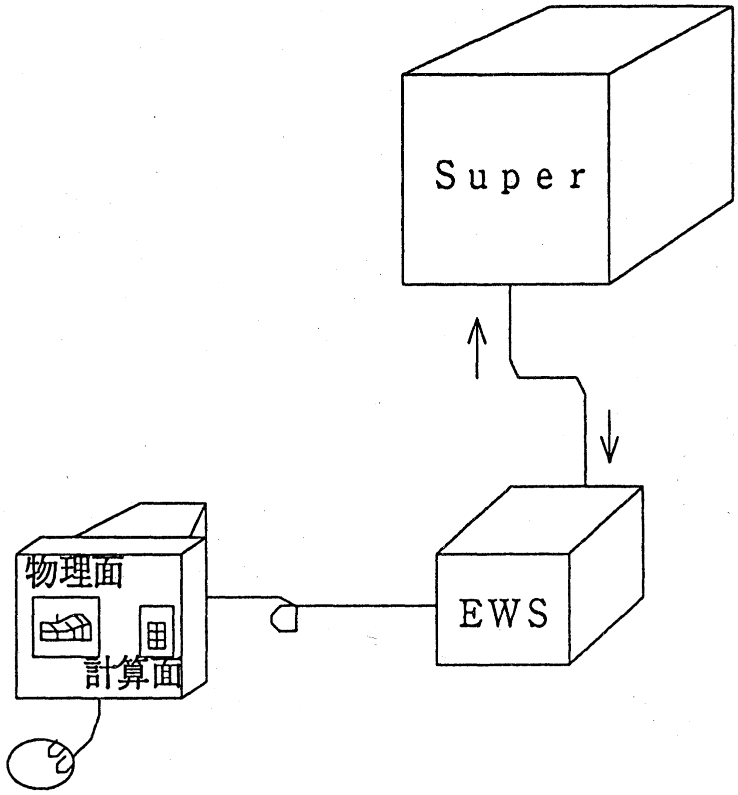


図4　対話型格子制御